## 1. Introdução

Nesta experiência estudaremos o movimento periódico executado por um corpo rígido que oscila em torno de um eixo que passa pelo corpo, o que é denominado de pêndulo físico, como apresentado na Figura 1. O pêndulo simples, quando se considera uma partícula de massa m suspensa por um fio de massa desprezível, é um caso específico de um pêndulo físico.

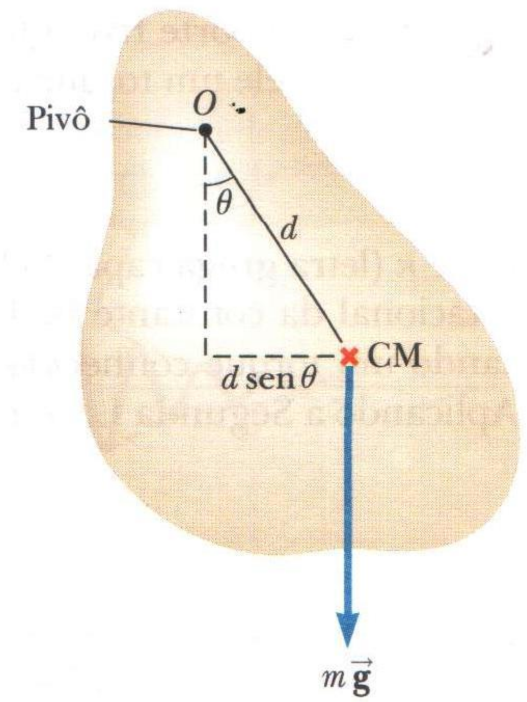


Figura 1. Esquema do pêndulo físico com eixo de rotação (pivô) em $O$. $d$ é a distância do eixo de rotação ao centro de massa e $\theta$ é o deslocamento angular inicial do pêndulo. (Figura retirada de *Jewett Jr., J.W.; Serway, R.A.; Física para Cientistas e Engenheiros, Vol. 2, Tradução da 8ª edição norte-americana, Cengage Learning, 2011*)

Quando é feito um deslocamento angular como o descrito na Figura 1, um torque de restituição agirá sobre o corpo, de maneira a trazê-lo novamente à posição de equilíbrio. Este torque é ação da força peso e é dado por:

$$\vec{\tau} = -\vec{d} \times \vec{P} \tag{1}$$

onde $d$ é a distância do eixo de rotação ao centro de massa. O torque, então, é dado por:

$$\tau = -dmg \operatorname{sen} \theta \tag{2}$$

Para pequenos deslocamentos angulares, $\theta < 15°$, $\operatorname{sen} \theta \approx \theta$, e, portanto:

$$\tau = -dmg\theta \tag{3}$$

Considerando a relação do torque com o momento de inércia e a aceleração angular, tem-se:

$$\tau = I_d \alpha = I_d \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{4}$$

Igualando as Equações (3) e (4), obtêm-se:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I_d}\theta = 0 \tag{5}$$

Esta equação é típica dos movimentos harmônicos simples, cuja solução geral é:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi) \tag{6}$$

*Atividade sugerida:* Confira que $\theta(t)$ é solução da Equação (5), e que:

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I_d} \tag{7}$$

e como,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{8}$$

$$\therefore \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I_d}{mgd}}} \quad (9)$$

O momento de inércia, $I_d$, pode ser determinado pelo Teorema de Huygens-Steiner, também conhecido como o Teorema dos Eixos Paralelos. Por este teorema:

$$I_d = I_{CM} + md^2 \quad (10)$$

onde $I_{CM}$ é o momento de inércia em relação ao centro de massa e $m$ é a massa do corpo.

O pêndulo físico utilizado neste experimento será uma barra metálica fina com vários orifícios para que possa ter diferentes eixos de rotação e, consequentemente, diferentes momentos de inércia. O momento de inércia em relação ao centro de massa deste tipo de corpo é:

$$I_{CM} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) \quad (11)$$

onde $a$ é a largura e $b$ é a altura da barra metálica laminar.

Substituindo as Equações 10 e 11 na Equação 9 têm-se:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}m(a^2 + b^2) + md^2}{mgd}} \quad (12)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}(a^2 + b^2) + d^2}{gd}} \quad (13)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k + d^2}{gd}} \quad (14)$$

onde $k = \frac{1}{12}(a^2 + b^2)$.

Uma constatação relevante é que o período não depende da massa do pêndulo. Outro dado importante é que a dependência do período com o eixo de rotação não é trivial, pois o $T$ tem dois termos cujas dependências com o $d$ são inversas. Como exemplo, é apresentado a seguir o gráfico da dependência do período com a distância do centro de massa ao eixo de rotação ($d$) para uma barra de 1,50 m de altura e 0,02 m de largura, considerando $g$ = 9,8 m/s².

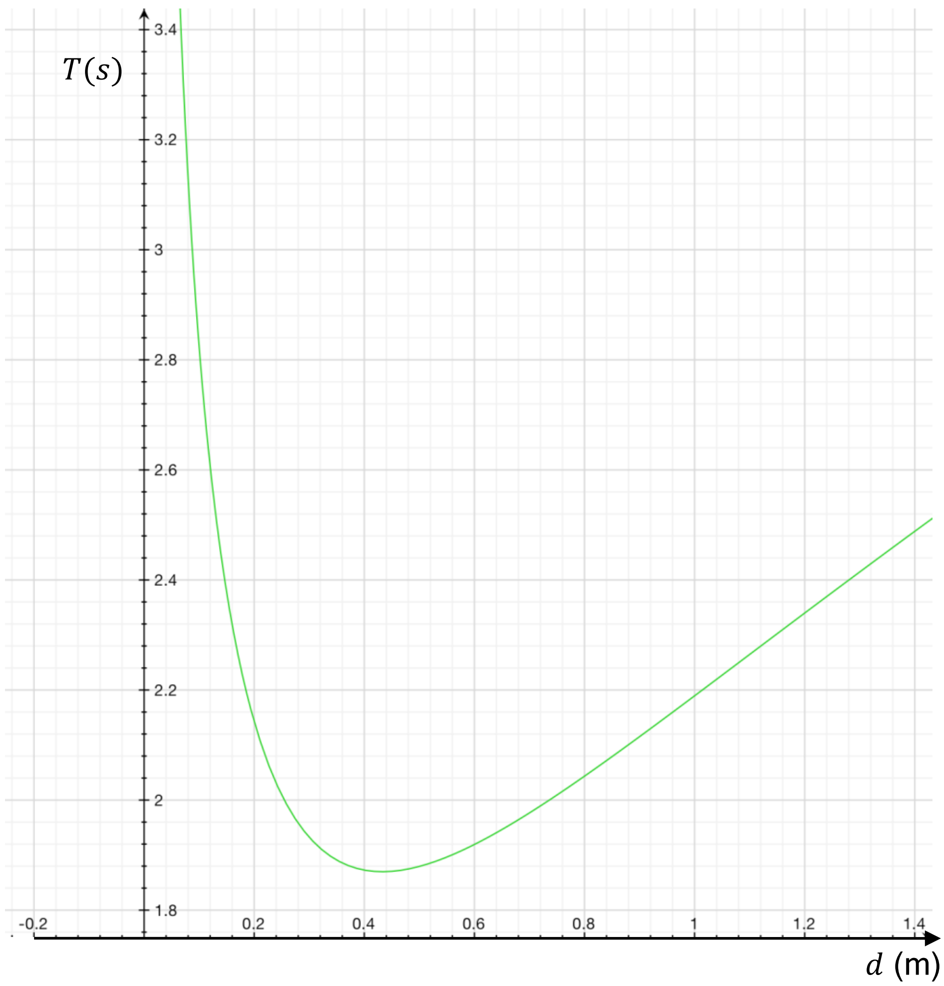


Figura 2. Gráfico da dependência do período com a distância do centro de massa ao eixo de rotação ($d$) para uma barra de 1,50 m de altura e 0,02 m de largura, considerando $g$ = 9,8 m/s².

Como pode-se observar na Figura 2, o período é máximo próximo ao centro de massa e diminui de forma acentuada à medida que $d$ aumenta. Até que chega um ponto em que o comportamento inverte, e o aumento de $d$ gera aumento do período, sendo de forma mais sutil. Devido a este comportamento complexo, para realizar as medidas experimentais, recomenda-se valores de $d$ próximos ao centro de massa, onde observam-se maiores variações no período.

## 2. Objetivos

O objetivo desta experiência é estudar o movimento de um pêndulo físico, determinando a dependência entre o período de oscilação e o seu eixo de rotação.

## 3. Materiais e Métodos

Os materiais necessários para realização deste experimento são:

- Barra metálica com múltiplos orifícios
- Suporte
- Cronômetro digital
- Trena
- Transferidor

Roteiro Experimental:

i. Meça, com a trena, a largura e a altura da barra metálica e anote as incertezas instrumentais em cada medida;
ii. Posicione a barra com um dos orifícios preso ao suporte e anote a distância do eixo de rotação ao centro de massa, com incerteza instrumental (considere a distribuição de massa na barra como uniforme para determinar o centro de massa);
iii. Escolha um valor de $\theta$, tal que o limite $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ ainda seja válido. Ou seja, $\theta$ não deve superar 15°;
iv. Coloque o pêndulo para oscilar e meça o tempo de 3 oscilações completas (repita 5 vezes a medida do tempo);
v. Repita os procedimentos de ii a iv para outros 4 eixos de rotação distintos, procurando manter o ângulo inicial constante.

## 4. Tabela de Dados

Tabela 1. Dados coletados na experiência de pêndulo físico.

| **Dependência de T com I** | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ângulo (°) =** | | **(MANTER FIX0 DURANTE O EXPERIMENTO)** | | | | | | | | | | |
| | d (m) | $\sigma_b$ em d (m) | Tempo (s) | | | | | **t** (s) | $\sigma_a$ (s) | $\sigma_b$ (s) | $\sigma_c$ (s) | Resultado de t |
| | | | Medida 1 | Medida 2 | Medida 3 | Medida 4 | Medida 5 | | | | | |
| $d_1$ | | | | | | | | | | | | (______±______)____ |
| $d_2$ | | | | | | | | | | | | (______±______)____ |
| $d_3$ | | | | | | | | | | | | (______±______)____ |
| $d_4$ | | | | | | | | | | | | (______±______)____ |
| $d_5$ | | | | | | | | | | | | (______±______)____ |

| **Dados da Barra Metálica** | | |
|---|---|---|
| | Medida | $\sigma_{instrumental}$ |
| Altura b (m) | | |
| Largura a (m) | | |
| k (m²) | | |

onde k = [(a²+b²)/12]

| T (s) | $\sigma_T$ (s) | Resultado de T |
|---|---|---|
| | | (______±______)____ |
| | | (______±______)____ |
| | | (______±______)____ |
| | | (______±______)____ |
| | | (______±______)____ |

## 5. Discussão

1. A partir das medidas de t, determine o período e sua incerteza ($T \pm \sigma_T$);
2. Determine $k$, sabendo-se que $k = \frac{1}{12}(a^2 + b^2)$.
3. Faça um gráfico de T versus d.
4. No gráfico, aplique um ajuste adequado à teoria descrita da Introdução deste capítulo (Equação 14) colocando no lugar do $k$ o seu valor numérico determinado no item 2.
5. A partir do ajuste, determine o valor da gravidade com sua respectiva incerteza.
6. Determine o erro percentual para o valor encontrado para a gravidade. Use como referência a gravidade teórica de 9,8 m/s².
7. Sabendo que erros de até 10% no valor da gravidade podem ser considerados como esperados, dado ao tipo de experimento que foi realizado, discuta o resultado do item anterior.