



Universidade Federal de Sergipe  
Departamento de Física  
Centro de Ciência Exatas e Tecnologia

Apostila de  
**LABORATÓRIO DE FÍSICA A**

**ELABORADA PELOS PROFESSORES:**  
**ANA FIGUEIREDO MAIA**  
**EDVALDO ALVES DE SOUZA JÚNIOR**  
**LAÉLIA P B CAMPOS DOS SANTOS**  
**MARCELO ANDRADE MACEDO**  
**MÁRCIA REGINA PEREIRA ATTIE**  
**MÁRIO ERNESTO GIROLDO VALERIO**

2016/1

# Informações Gerais sobre o Curso

As disciplinas de laboratório consistem em diversos experimentos com os quais se espera poder desenvolver no aluno o comportamento crítico diante dos fenômenos físicos. Os trabalhos de laboratório têm a finalidade de ilustrar os assuntos abordados no curso teórico e também de ensinar os rudimentos da técnica de observação dos fenômenos físicos, ou seja, como efetuar medidas, analisá-las e como apresentar os resultados obtidos.

As aulas têm duração de 2 horas, sendo ministradas semanalmente. Cada turma será dividida em aproximadamente 4 grupos para a realização das atividades no laboratório. Para a realização das experiências de cada aula, o aluno deverá ter em mãos a apostila referente ao experimento, que é disponibilizada semestralmente pelo site [www.dfi.ufs.br](http://www.dfi.ufs.br).

A discussão com o professor e colegas é muito importante para esclarecer e completar as informações da apostila. É importante também que o aluno venha para a aula já sabendo qual a experiência que irá realizar e quais os seus fundamentos teóricos.

O benefício que os trabalhos práticos podem proporcionar ao aluno dependem em grande parte de seu interesse e de seu desempenho. O aluno deve aprender a prestar atenção no equipamento experimental disponível, procurando entender como funciona, quais suas limitações, suas imperfeições e como isso tudo influi no modelo físico que se quer testar. Antes de começar um experimento, a equipe precisa discutir como ele deverá ser feito.

A presença nas aulas é obrigatória. A ausência na aula implica em nota zero no relatório referente à experiência. Solicita-se aos alunos que respeitem rigorosamente o horário de início das aulas de laboratório. **O atraso máximo permitido é de 15 min, após isso o aluno não deve ter mais acesso à aula.**

## 1. O Relatório

As características fundamentais de um Relatório são a objetividade e a clareza. Ele deve ser escrito de forma que outra pessoa, apoiando-se nele,

possa repetir o experimento sem necessitar que o autor do texto esteja presente para decifrá-lo.

O Relatório deve respeitar sempre certos aspectos e normas indispensáveis para que o leitor possa entender imediatamente os pontos essenciais do trabalho feito na sala de aula. Sem ser prolixo, ele deve conter o maior número possível de informações sobre o que foi feito, como foi feito e os resultados alcançados. Apresentaremos a seguir uma sugestão de organização para o relatório.

Um relatório contém basicamente as seguintes partes:

1. Identificação: Deve consistir em uma capa com a indicação clara do título do trabalho, os nomes dos componentes do grupo, a turma de laboratório e a data da realização da experiência.

2. Introdução: Deve-se expor nesta parte o contexto do trabalho, a importância do tema, um pequeno histórico (se for o caso), a teoria envolvida e as correlações com outros assuntos. É importante que a introdução do relatório não seja cópia da Introdução da apostila. Pesquise outras fontes!

3. Objetivos: Nesta parte deve-se apresentar, de forma bem sucinta, os objetivos da prática experimental. É mais fácil escrever os objetivos em forma de itens, que devem ser sempre iniciados com um verbo no infinitivo.

4. Materiais e Métodos: Esta parte é dedicada à apresentação dos materiais e equipamentos utilizados, uma descrição do arranjo experimental montado e uma explicação minuciosa do procedimento experimental adotado. É aconselhável mostrar um esboço do aparato utilizado, para facilitar a compreensão do leitor.

5. Resultados e Discussão: Nesta parte é apresentada, primeiramente, uma tabela com os dados obtidos. Em seguida, vêm os cálculos, gráficos e discussões. É importante salientar que é obrigatória a apresentação das equações utilizadas, de forma que todos os valores apresentados possam ser recalculados pelo leitor. Não serão considerados resultados apresentados sem a devida explicação.

6. Conclusões: Esta parte é dedicada à apresentação sucinta dos principais resultados e das conclusões obtidas no trabalho.

7. Bibliografia: Todo relatório deve conter uma bibliografia, onde são listadas todas as referências consultadas. É importante que a lista de referência tenha

uma formatação uniforme e que sejam apresentadas as seguintes informações essenciais:

1. Para livros: Autor(es), título, edição, editora, local onde foi editado, ano.

*Exemplo:*

Helene, O.A.M. e Vanin, V.R., “Tratamento Estatístico de dados”, 2a. edição, Edgard Blucher, São Paulo (1981).

2. Para artigos de revistas: Nome(s) do(s) autor(es), título (optativo), título da revista, volume, número, página e ano de publicação.

*Exemplo:*

A.A. Gusev, T. Kohno, W. N. Spjeldvik, I. M. Martin, G. I. Pugacheva, A. Turtelli, Dynamics of the low altitude secondary proton radiation belt, “Advances in Space Research”, Vol.21, N.12, pp. 1805-1808 (1998).

3. Para texto de internet: Nome(s) do(s) autor(es), título, endereço eletrônico que está disponível, data de acesso.

*Exemplo:*

Nature, Bases de dados, disponível em: <<http://www.periodicos.capes.gov.br/>>, acesso em 15/01/2016.

Para outros tipos de referências, consulte a norma NBR 10520, da ABNT (ABNT, Informação e documentação - Apresentação de citações em documentos, NBR 10520, 2001).

O relatório deve ser realizado pelo grupo que realizou a experiência. É importante ressaltar que todos os alunos devem participar da elaboração do relatório e que as análises e conclusões apresentadas devem ser discutidas em conjunto. Além disso, todas as partes do relatório, inclusive a Introdução, devem ser redigidas com palavras próprias dos alunos. Não será tolerado nenhum tipo de desonestidade nos relatórios, como cópia total ou parcial de texto de livros, apostilas ou mesmo de relatórios de outros grupos, que, quando identificado, implicará na anulação da nota referente ao relatório.

# Avaliação de Incertezas

Os conceitos que estudaremos aqui são de fundamental importância para o trabalho dentro de qualquer laboratório e serão utilizados durante todo o curso.

## 1. Incerteza versus Erro

O conceito de incerteza como um atributo quantificável é relativamente novo na história da medição, embora erro e análise de erro tenham sido, há muito, uma prática da ciência da medição ou metrologia. Atualmente reconhece-se que, mesmo quando todos os componentes de erro tenham sido avaliados e as correções adequadas tenham sido aplicadas, ainda assim permanece uma incerteza sobre o quão correto é o resultado declarado, isto é, quanto o resultado da medição representa o valor verdadeiro da grandeza medida.

É muito importante distinguir o termo “incerteza de medição” do termo “erro” (em um resultado de medição):

A **incerteza** do resultado de uma medição reflete a falta de conhecimento exato do valor do mensurando. A palavra “incerteza” significa dúvida, e assim, no sentido mais amplo, “incerteza de medição” significa dúvida acerca da validade do resultado de uma medição. A incerteza só pode ser obtida e interpretada em termos probabilísticos.

O **erro** é um conceito idealizado como sendo o resultado da medição menos o valor verdadeiro convencional do mensurando. Uma vez que o valor verdadeiro é, na grande maioria das vezes, uma quantidade desconhecida, o erro também é uma quantidade indeterminada, por natureza. Há, entretanto, situações nas quais o valor verdadeiro do mensurando é conhecido, e, portanto, é possível conhecer o valor do erro. Este é o caso de muitas das experiências didáticas, que são realizadas no intuito de verificar valores já conhecidos.

Durante a realização de um experimento, as medidas obtidas são afetadas por diversos parâmetros, muitos dos quais introduzem desvios nos resultados. De forma geral, os **erros experimentais** podem ser classificados em três grandes grupos: **erros aleatórios**, **erros sistemáticos** e **erros grosseiros**.

Os **erros aleatórios** são flutuações nas medidas que ocorrem ao acaso. Este tipo de erro é inevitável e impossível de ser completamente eliminado e é consequência de fatores intrínsecos do processo de medição, como, por exemplo, o ruído eletrônico do equipamento. A influência deste tipo de erro faz as medidas variarem para mais ou para menos, fazendo com que aproximadamente a metade das medidas realizadas de uma mesma grandeza numa mesma situação experimental esteja desviada para valores maiores, e a outra metade esteja desviada para valores menores. Portanto, para um grande número de medidas, os erros aleatórios tendem a se cancelar. **Erros aleatórios** podem ser tratados quantitativamente através de métodos estatísticos, de maneira que seus efeitos na grandeza física medida podem ser, em geral, determinados. Os **erros aleatórios** afetam a **precisão** da medida, que é a quantificação de quão reprodutíveis são as medidas, sem importar se estão próximas ou não do valor correto.

Os **erros sistemáticos** são causados por fontes identificáveis e, em princípio, podem ser eliminados ou compensados. **Erros sistemáticos** fazem com que as medidas feitas estejam sempre acima ou sempre abaixo do valor verdadeiro, prejudicando a **exatidão (ou acurácia)** da medida, que é a quantificação de quão próximo do valor verdadeiro está o valor médio das medidas. Uma das principais tarefas do idealizador ou realizador de medições é **identificar e eliminar o maior número possível de fontes de erros sistemáticos**. Uma das principais causas de erros sistemáticos é a falta de uma correta calibração do instrumento.

Os **erros grosseiros** são normalmente causados por alguma distração do operador ou por alguma falha de funcionamento do equipamento. Resultam em valores muito distantes dos demais valores medidos. São normalmente facilmente identificados e devem ser eliminados dos conjuntos de dados.

Nas definições de erros aleatórios e erros sistemáticos, foram definidos também dois outros termos, comumente considerados como sinônimos: exatidão e precisão. Estes termos têm definições completamente diferentes,

que podem ser melhor entendidas por meio de uma ilustração de “Tiro ao Alvo”, apresentada na Figura 1.

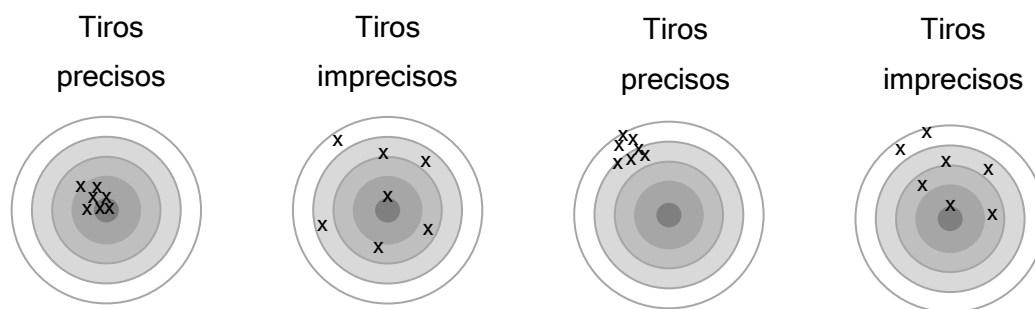


Figura 1. Esquema ilustrativo sobre precisão e exatidão em medições.

## 2. Erro Relativo

A magnitude do erro ou da incerteza, por si só, não é uma quantidade muito informativa. A sua importância revela-se em comparação com o valor medido. Para ilustrar a afirmação, consideremos a medição de duas distâncias, a largura de uma página A4 e o raio equatorial da Terra. Uma medição da largura de uma página A4 produziu o resultado de 209 mm. Sabendo-se que o valor verdadeiro é 210 mm, o erro cometido foi, em módulo, 1 mm. Uma determinação do raio equatorial da Terra resultou em 6375 km. Sendo o valor verdadeiro desta quantidade 6371 km, concluímos que o erro cometido é agora de 4 km, ou seja,  $4 \cdot 10^6$  mm. O erro da primeira medição é muito menor que o da segunda, mas a verdade é que quatro quilômetros de erro na medição do raio da Terra tem uma importância relativa muito menor que o erro de um milímetro na medição da largura da página A4. Outro exemplo: afirmar que ontem tive dois convidados para jantar em casa, quando de fato foram três, cometo um erro grosseiro, mas se disser que cinquenta mil espectadores assistiram a um jogo de futebol quando, na verdade, apenas quarenta e nove mil o presenciaram, o erro não terá sido grosseiro, apesar de ser superior ao cometido na contagem dos convidados.

Para melhor avaliar o valor relativo do erro, introduz-se uma quantidade chamada erro relativo, que é a razão entre o erro e o valor verdadeiro da quantidade medida. Para distinguir bem o erro relativo, chama-se erro absoluto

a diferença entre o valor medido e o valor verdadeiro. Se  $x_v$  for o valor verdadeiro da quantidade a ser medida e o resultado da medição for  $x$ , então:

$$\text{Erro ou erro absoluto: } E = x - x_v \quad (1)$$

$$\text{Erro relativo, expresso em porcentagem: } e = \left( \frac{x - x_v}{x_v} \right) \times 100\% \quad (2)$$

A apresentação de valores em termos percentuais não é importante apenas para os erros. Os valores de incertezas também são melhores compreendidos quando apresentados em termos percentuais.

### 3. Tipos de Incertezas

A incerteza da medida é um parâmetro que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando. Existem muitas fontes possíveis de incertezas em uma medição, entre elas: a definição incompleta do mensurando; a realização imperfeita da definição do mensurando; uma amostragem não-representativa; o conhecimento inadequado dos efeitos das condições ambientais sobre a medição ou medição imperfeita das condições ambientais; o erro de tendência pessoal na leitura de instrumentos analógicos; a resolução finita do instrumento; os valores inexatos dos padrões de medição; os valores inexatos de constantes; as aproximações e suposições incorporadas ao método e procedimento de medição; as variações nas observações repetidas do mensurando sob condições aparentemente idênticas.

Os componentes da incerteza de medição estão agrupados em duas categorias em função do tipo de avaliação: incertezas de tipo A e incertezas de tipo B. As incertezas de tipo A são aquelas estimadas por métodos estatísticos, enquanto que as de tipo B são estimadas por outros métodos. Estas categorias se aplicam às incertezas e não substituem os termos “aleatório” e “sistemático”, anteriormente utilizados.

Assim como no caso do erro, é mais fácil entender a dimensão da incerteza quando expressa em termos relativos.



#### 4. Avaliação da Incerteza de Tipo A ( $\sigma_A$ )

Para avaliação da incerteza de tipo A é preciso empregar conceitos estatísticos. Os conceitos mais importantes para avaliação da incerteza de tipo A estão definidos a seguir.

Na maioria das vezes são feitas medidas repetidas de um mesmo mensurando. Uma boa estimativa do valor real deste mensurando é dada pelo **valor médio** das medidas:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (3)$$

Ou seja, o valor médio é a soma dos valores das medições dividida pelo número de medições. É comum expressar o valor médio de uma determinada grandeza colocando uma barra em cima do símbolo da grandeza ou colocando o seu símbolo em negrito.

Para quantificar o grau de dispersão das medidas em relação ao valor médio, utiliza-se o conceito de **desvio padrão da medida**:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (4)$$

O valor do desvio padrão da medida é muitas vezes utilizado como incerteza associada ao valor médio. Entretanto, em uma correta estimativa de incertezas, é preciso calcular tanto a incerteza estatística, que é denominada incerteza do tipo A e não é exatamente igual ao desvio padrão da medida, quanto a incerteza do tipo B, que veremos mais adiante. A incerteza de tipo A associada a um valor médio é estimada por outro tipo de desvio padrão, o **desvio padrão da média**:

$$\sigma_A = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (5)$$

Espera-se que o valor médio torne-se tanto mais exato quanto maior for o número n de medidas. Por isso, o desvio padrão da média é um conceito que “premia” o aumento do número de medidas.

## 5. Avaliação da Incerteza de Tipo B ( $\sigma_B$ )

A incerteza de tipo B é avaliada por julgamento científico, baseando-se em todas as informações disponíveis sobre a possível variabilidade do mensurando, que não tenham sido obtidas através de observações repetidas (avaliadas por métodos estatísticos). O conjunto de informações pode incluir dados de medidas prévias, a experiência ou conhecimento geral do comportamento e propriedades de materiais e instrumentos relevantes, especificações do fabricante, dados fornecidos em certificados de calibração e outros certificados e incertezas relacionadas a dados de referência extraídos de manuais.

A experiência, a integridade, o senso de responsabilidade e a habilidade (treinamento) do operador são partes importantes do conjunto de informações disponíveis para uma avaliação de tipo B.

Deve-se reconhecer que uma avaliação da incerteza de tipo B pode ser tão confiável quanto uma avaliação de tipo A, especialmente em uma situação de medição em que uma avaliação de tipo A é baseada em um número comparativamente pequeno de medidas.

É possível analisar muitos tipos de incertezas de tipo B, como, por exemplo, o posicionamento do instrumento de medição ou a habilidade do operador. Entretanto, neste curso, por simplicidade, a incerteza de tipo B será avaliada apenas pela incerteza instrumental, ou seja,  $\sigma_B = \sigma_{\text{instrumento}}$ .

## 6. Incerteza Instrumental

Em ciência e tecnologia, é fundamental medir grandezas físicas. Estas grandezas podem ser, por exemplo, comprimentos, intervalos de tempo, voltagem entre dois pontos, carga elétrica transportada, intensidade luminosa, e muitas outras.

A medição de uma grandeza consiste, na grande maioria dos casos, em fazer a leitura de uma graduação, tal como ao determinarmos um intervalo de tempo com um cronômetro de ponteiro ou um comprimento com uma régua. Efetuar a medição significa ler a posição de um índice ou ponteiro sobre uma escala (o índice pode ser a extremidade do próprio corpo, com um traço da

graduação). Na Figura 2, na leitura correspondente à posição M, a única coisa que podemos afirmar é que está entre 14 e 15.

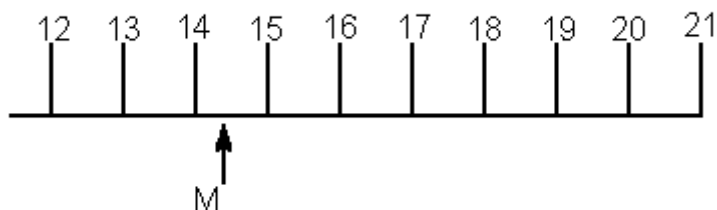


Figura 2. Exemplo de uma medição em uma escala graduada.

Para fazermos esta medida, precisamos fazer uma interpolação, ou seja, imaginamos que cada um dos menores intervalos da graduação esteja dividido em partes iguais, suponhamos, em 10 partes, e lemos a posição do índice nesta escala imaginária. Certamente muitos de vocês indicaram o valor de M como 14,4, alguns como 14,3 ou até como 14,5. Mas alguém indicaria este valor como 14,0 ou 14,8? Muito dificilmente. Portanto, podemos considerar que existe um “Limite de Erro”, e que qualquer erro acima dele é um erro grosseiro. Numa avaliação simplificada das incertezas no processo de medição, o “Limite de Erro” pode ser adotado como o valor da incerteza de tipo B, ou seja, a incerteza instrumental.

Muitas vezes a incerteza instrumental é indicada no próprio aparelho. Por exemplo, em um cronômetro digital, no qual vem gravado o valor 0,001 s, esta é a sua incerteza instrumental. É frequente encontrarmos nos medidores elétricos esta incerteza indicada como percentual do "valor de fundo de escala", isto é, o maior valor que o aparelho pode medir. Por exemplo, em um voltímetro com fundo de escala 200 volts e 50 divisões, no qual se indica 2% como incerteza instrumental, isto significa que seu valor é de 4 volts, correspondente a 1 divisão da escala.

Se a incerteza não estiver indicada no instrumento, o procedimento usual é adotar como “limite de erro”: a menor divisão, para instrumentos digitais; e a metade da menor divisão, para instrumentos analógicos. **Observe que esta regra só vale se a grandeza medida permitir tal precisão.** Um objeto com irregularidades superiores à precisão da régua, ou uma corrente elétrica com flutuação superior à precisão do multímetro não poderão ser medidos dentro da precisão dos instrumentos, e requerem uma análise caso a caso.

Além disso, em caso em que não há possibilidades de estimativas além das marcações existentes na escala analógica, como é o caso do **paquímetro** que veremos na aula seguinte, é preciso adotar como **incerteza instrumental a resolução do instrumento**.

## 7. Incerteza Combinada

Após a determinação das incertezas de tipo A e de tipo B, é preciso determinar o valor da incerteza total associada às medidas. Este valor de incerteza é denominado de **incerteza combinada** ( $\sigma_C$ ), e é dada por:

$$\sigma_C = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} \quad (6)$$

A depender da medida, o índice (C) deve ser trocado pela letra referente à grandeza.

Exemplos:

$\sigma_v$  = incerteza combinada da velocidade

$\sigma_t$  = incerteza combinada do tempo

$\sigma_T$  = incerteza combinada do período

$\sigma_p$  = incerteza combinada do momento

## 8. Incerteza Relativa

A **incerteza relativa** ( $\sigma_{Rel}$ ) é uma medida que auxilia na comparação entre instrumentos diferentes. Deve ser calculada dividindo a incerteza combinada pelo valor da média, e em seguida multiplicando-se por 100%.

$$\sigma_{Rel} = \frac{\sigma_C}{\bar{x}} \times 100\% \quad (7)$$

## 9. Propagação de Incertezas

Para avaliação da incerteza associada a um valor médio é preciso analisar as incertezas de tipo A e tipo B envolvidas no processo de medição, e, a partir delas, determinar a incerteza combinada associada à grandeza medida. Além disso, muitas grandezas físicas obtidas no laboratório são funções de muitas variáveis. Para determinar a incerteza padrão de uma grandeza que é função de várias grandezas medidas é preciso considerar as incertezas combinadas associadas a cada uma de suas variáveis. Para tanto, é preciso usar a noção de **propagação de incertezas**.

Suponha que certa grandeza física  $z$  é calculada como função de outras grandezas  $x_1, x_2, x_3, \dots$  das quais conhecemos as respectivas incertezas combinadas  $\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_3}, \dots$ . Ou seja,  $z$  é uma função de  $x_1, x_2, x_3, \dots$

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \dots) \quad (8)$$

A incerteza da grandeza calculada  $\sigma_z$  é obtida a partir da seguinte relação:

$$\sigma_z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \sigma_{x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_3} \sigma_{x_3}\right)^2 + \dots} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \sigma_{x_i}\right)^2} \quad (9)$$

Onde:  $\frac{\partial z}{\partial x_i}$  indica a derivada parcial da grandeza calculada  $z$  em relação à grandeza medida  $x_i$ .

A seguir, alguns exemplos de fórmulas de propagação de incertezas.

Exemplo 1:  $z = x_1 + x_2 + x_3 \dots$

Portanto,

$$\sigma_z = \sqrt{\left(\frac{\partial(x_1 + x_2 + x_3 + \dots)}{\partial x_1} \sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x_1 + x_2 + x_3 + \dots)}{\partial x_2} \sigma_{x_2}\right)^2 + \dots} \quad (10)$$

Resolvendo apenas o primeiro termo, têm-se:

$$\frac{\partial(x_1 + x_2 + x_3 + \dots)}{\partial x_1} \sigma_{x_1} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \dots \right) \sigma_{x_1}$$

Exceto o termo  $\frac{\partial x_1}{\partial x_1}$ , que é = 1, todos os termos desta soma são nulos, pois se trata da derivada de uma constante. Portanto, o primeiro termo da Equação (10) é  $\sigma_{x_1}$ . Analogamente, é possível determinar todos os termos da Equação (10), e chegar ao resultado:

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \sigma_{x_3}^2 + \dots} \quad (11)$$

Exemplo 2:  $z = kx_1$ , onde  $k$  é uma constante.

Portanto,

$$\sigma_z = \sqrt{\left( \frac{\partial(kx_1)}{\partial x_1} \sigma_{x_1} \right)^2} \quad (12)$$

$$\sigma_z = \sqrt{(k\sigma_{x_1})^2}$$

Antes do próximo passo, é importante ressaltar que a incerteza é sempre positiva, por definição. Assim sendo, é preciso desconsiderar as raízes negativas desta equação. O resultado final é, portanto:

$$\sigma_z = |k| \sigma_{x_1} \quad (13)$$

Exemplo 3:  $z = x_1 \cdot x_2$

Portanto,

$$\sigma_z = \sqrt{\left( \frac{\partial(x_1 \cdot x_2)}{\partial x_1} \sigma_{x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial(x_1 \cdot x_2)}{\partial x_2} \sigma_{x_2} \right)^2} \quad (14)$$

Neste caso, a primeira derivada parcial é =  $x_2$  e a segunda é =  $x_1$ .

$$\sigma_z = \sqrt{(x_2 \cdot \sigma_{x_1})^2 + (x_1 \cdot \sigma_{x_2})^2} \quad (15)$$

A partir de manipulações matemáticas, é possível reescrever este resultado como:

$$\left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{x_1}}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{x_2}}{x_2}\right)^2 \quad (16)$$

A grande vantagem da Equação (16) é que ela é expansível para uma quantidade qualquer de termos:

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \dots) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots$$

$$\left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2 = \sum_i \left(\frac{\sigma_{x_i}}{x_i}\right)^2 \quad (17)$$

## 10. Algarismos Significativos

Toda vez que realizamos a medida de qualquer grandeza, esta medida é sempre feita dentro de certas limitações impostas pelo próprio processo de medição e pelo instrumento de medida empregado.

As limitações do aparelho e do processo de medição devem ser representadas no resultado final pelo **valor médio da grandeza**, usando o número de algarismos que realmente tenham algum significado, seguido da **incerteza associada** e da **unidade da grandeza**. Ao proceder desta forma, mesmo uma pessoa que não tenha acompanhado o processo consegue inferir sobre a confiabilidade da medida.

O resultado final de uma medida deve ser expresso apenas utilizando **algarismos significativos**. Entender o que é um algarismo significativo é importante para expressar corretamente um resultado experimental e sua incerteza.

Na prática, o número de dígitos ou algarismos que devem ser apresentados num resultado experimental é determinado pela incerteza associada a ele. O primeiro passo é determinar o valor médio e a incerteza total, evitando arredondamentos durante os cálculos. Apesar da incerteza poder ser apresentada por um ou dois algarismos significativos (Vuolo, 1999),

neste curso será adotado apenas **1 (um) algarismo significativo**. Entretanto, antes da apresentação do resultado final, a incerteza deve ser arredondada da seguinte forma:

- Se o segundo algarismo significativo for igual ou maior que 5 (cinco), adiciona-se 1 (um) ao primeiro algarismo;
- Se o segundo algarismo significativo for menor que 5 (cinco), o primeiro algarismo permanece inalterado.

Exemplos:

$\sigma_C = 0,156 \text{ m/s} \cong 0,2 \text{ m/s}$	$\sigma_C = 0,146 \text{ m/s} \cong 0,1 \text{ m/s}$
$\sigma_C = 1,487 \text{ m/s}^2 \cong 1 \text{ m/s}^2$	$\sigma_C = 1,68 \text{ m/s}^2 \cong 2 \text{ m/s}^2$
$\sigma_C = 0,000249 \text{ kg} \cong 0,0002 \text{ kg}$	$\sigma_C = 0,000289 \text{ kg} \cong 0,0003 \text{ kg}$

Já com a incerteza expressa de forma correta, deve-se aproximar o valor médio da grandeza exatamente com o mesmo número de casas decimais de sua incerteza. Para fazer isso sem errar, é preciso que a incerteza e o valor médio estejam apresentados exatamente na mesma formatação. A seguir são apresentados alguns exemplos ilustrativos.

Exemplos:

<b>Incerteza</b>	<b>Grandeza</b>	<b>Resultado</b>
$\sigma_C = 0,2 \text{ m/s}$	$2,467 \text{ m/s}$	$2,5 \pm 0,2 \text{ m/s}$
$\sigma_C = 1 \text{ m/s}^2$	$10,29 \text{ m/s}^2$	$10 \pm 1 \text{ m/s}^2$
$\sigma_C = 0,0002 \text{ kg}$	$0,32561 \text{ kg}$	$0,3256 \pm 0,0002 \text{ kg}$

<b>Incerteza</b>	<b>Grandeza</b>	<b>Resultado</b>
$\sigma_C = 0,2 \text{ m/s}$	$2,447 \text{ m/s}$	$2,4 \pm 0,2 \text{ m/s}$
$\sigma_C = 1 \text{ m/s}^2$	$10,69 \text{ m/s}^2$	$11 \pm 1 \text{ m/s}^2$
$\sigma_C = 0,0002 \text{ kg}$	$0,32599 \text{ kg}$	$0,3260 \pm 0,0002 \text{ kg}$



## 11. Exemplo de Estimativa de Incerteza

Considere um experimento no qual é preciso medir o comprimento de um cilindro metálico (L). O instrumento utilizado, que é analógico, tem como menor divisão 1 milímetro. São feitas 10 medidas do cilindro, dando os seguintes resultados: 13,10 cm; 13,55 cm; 13,44 cm; 13,98 cm; 13,20 cm; 13,70 cm; 13,98 cm; 13,63 cm; 13,37 cm; 13,61 cm, e o último dígito foi sempre estimado pelo operador.

$$\text{Valor Médio} \Rightarrow \bar{x} = 13,556 \text{ cm}$$

$$\text{Desvio Padrão} \Rightarrow \sigma = 0,292772 \text{ cm}$$

$$\text{Incerteza de tipo A} \Rightarrow \sigma_A = 0,092583 \text{ cm}$$

Para estimar a incerteza de tipo B é preciso saber a incerteza que tem o instrumento. Caso não haja nenhuma indicação no instrumento ou num certificado de calibração, pode-se estimar considerando o limite de erro, que no caso é metade da menor divisão.

$$\text{Incerteza de Tipo B} \Rightarrow \sigma_B = 0,05 \text{ cm}$$

$$\text{Incerteza Combinada} \Rightarrow \sigma_C = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} = \sqrt{(0,092583)^2 + (0,05)^2} = 0,105221$$

$$\text{Resultado Final} \Rightarrow L = 13,6 \pm 0,1 \text{ cm}$$

$$\text{Incerteza Relativa} \Rightarrow 0,7\%$$

Observação 1: Para calcular a Incerteza Relativa deve-se dividir a incerteza pelo valor da medida, apresentados no Resultado Final, e em seguida multiplicar por 100%.

Observação 2: Deve-se evitar arredondar os valores dos cálculos em etapas intermediárias, para não haver distorções nos resultados finais.

É muito importante que os pesquisadores saibam como estimar e expressar as incertezas envolvidas no processo de medição. Os conceitos que

foram apresentados aqui são apenas uma breve exposição sobre o assunto. A seguir são sugeridas algumas leituras para um estudo mais completo.

### **Referências**

1. ABNT/INMETRO. Guia para expressão da incerteza de medição. 3ª Edição Brasileira. Rio de Janeiro, 2003.
2. Vuolo, J.H. Fundamentos da teoria de erros. 2ª Ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
3. Vuolo, J.H. Avaliação e expressão de incerteza em medição. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 21, no. 3, 1999.

## 12. Lista de Questões

1. Quantos algarismos significativos têm as medições abaixo?  
 $A=0,035 \pm 0,005$     $B=0,305 \pm 0,005$     $C=0,35 \pm 0,05$     $D=0,350 \pm 0,050$
2. Num saco de leite está impresso seu conteúdo:  $V = 1 \ell$ . Feita uma medida pela fiscalização, apurou-se um conteúdo de  $700 \text{ m}\ell$ . O fabricante deve ser considerado idôneo ou não? (Dica: expresse a medida de forma similar a apresentada pelo fabricante e depois compare!)
3. Como você responderia ao problema anterior, se o conteúdo impresso fosse  $V = 1,0 \ell$ ?
4. Utilizando uma régua milimetrada ou uma trena, meça o comprimento e a largura de uma folha de papel ofício. Repita a medida 5 vezes. Represente estes valores usando o número correto de algarismos significativos, a incerteza das medidas e a unidade. (Não esqueça da incerteza do instrumento!)
5. Calcule a área da folha da questão 4. Usando a fórmula de propagação de incertezas, calcule a incerteza desta área. Forneça uma indicação completa do resultado, incluindo a incerteza (com o número correto de algarismos significativos) e a unidade.
6. Usando um cronômetro, meça o tempo necessário para percorrer uma distância de 10 metros. Realize um total de 20 medidas deste tempo. Determine a média e o desvio padrão da média dos tempos medidos. Apresente o resultado final utilizando o número correto de algarismos significativos, a incerteza da medida e a unidade.
7. Usando o tempo médio determinado na questão 6, calcule sua velocidade durante aquele procedimento. Usando a fórmula de propagação de incertezas, determine a incerteza desta velocidade.
8. Quatro pessoas mediram a aceleração da gravidade em um local e obtiveram os seguintes dados (em  $\text{m/s}^2$ ):

Obs 1	9,75	9,47	10,22	10,05	9,87	9,99	10,08
Obs 2	8,37	8,61	8,10	8,44	8,68	8,70	8,84
Obs 3	8,01	12,06	9,66	11,14	8,97	9,38	10,45
Obs 4	2,55	3,35	3,04	3,29	3,87	2,96	3,48

Considere o valor verdadeiro igual a  $9,8 \text{ m/s}^2$  e indique o erro relativo de cada medida.

9. O que você pode dizer sobre a existência de erros aleatórios nas quatro medidas feitas da questão 8? E sobre erros sistemáticos?
10. Deduza a equação de propagação de incertezas para:

a)  $z = x_1 - x_2 - x_3 - \dots$

b)  $z = \frac{x_1}{x_2}$

c)  $z = x^m$